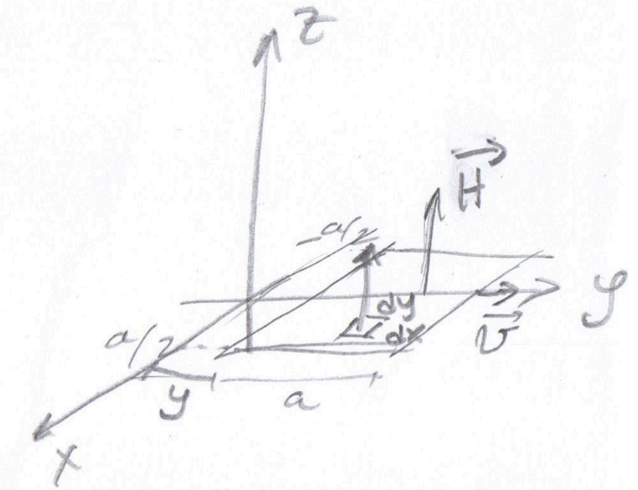
1) Existe no vácuo um vetor campo magnético dado por $\vec{H} = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \hat{a}_z$. Uma espira quadrada de lado a, inteiramente contida no plano z = 0, desloca-se ao longo desse plano com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{a}_y$, e seu centro cruza a origem do sistema de coordenadas em t =0.

a) Calcule o fluxo enlaçado pela espira em função do tempo.

b) Calcule diretamente a fem induzida no circuito, como função do tempo, com o emprego da lei de Faraday.

c) Fale sobre o sentido da corrente induzida quando ele passa pelo ponto y=a.



$\phi = \int \vec{H} \cdot d\vec{A}$ $\quad d\vec{A}_{\parallel} = dx\,dy\,\hat{a}_z$ ÁREA PARALELA A $\vec{H}$

$$\phi = \int H\,dA_{\parallel} = \int H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) dx\,dy$$

$$\phi = \int_{y}^{y+a} \int_{-a/2}^{a/2} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) dx\,dy$$

$$\phi = H_0 \frac{a}{\pi}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} \left(-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)\Big|_{y}^{y+a} = H_0 \frac{a^2}{\pi^2} 2 \times \left[\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi (y+a)}{a}\right)\right]$$

MAS $\vec{v} = v_0 \hat{a}_y \Rightarrow y(t) = v_0 t - \frac{a}{2}$ POIS EM $t=0$ O CENTRO A ESPIRA PASSA NA ORIGEM ENTÃO $y = -a/2$

$$\phi(t) = \frac{2 H_0 a^2}{\pi^2}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{a}(v_0 t - a/2)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{a}(v_0 t + a/2)\right]\right\} = \frac{2 H_0 a^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi v_0}{a} t\right)$$

b) $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2a H_0 v_0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi v_0}{a} t\right)$

c) EM $y = a$ $\quad t = \frac{a + a/2}{v_0} = \frac{3a}{2v_0} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi v_0}{a} \frac{3a}{2v_0}\right) = 0$ $\quad v_{IND} = 0$ POIS O FLUXO É MÁXIMO

2) A figura ao lado ilustra uma seção cilíndrica de um meio isolante de permissividade ε entre dois condutores, também cilíndricos, todos com a mesma seção transversal S. No condutor flui uma corrente cuja densidade é uniforme e variante no tempo, e dada por $J(t) = J_0 \cos(\omega t)\, \hat{a}_z$, em que ω representa uma frequência angular. Admita que o campo elétrico no meio isolante seja também uniforme e totalmente confinado nesse meio. Determine:

a) A densidade de corrente de deslocamento no meio isolante.

b) A diferença de potencial que se desenvolve no meio isolante entre os pontos a e b, assumindo que seu valor seja nulo em t = 0.

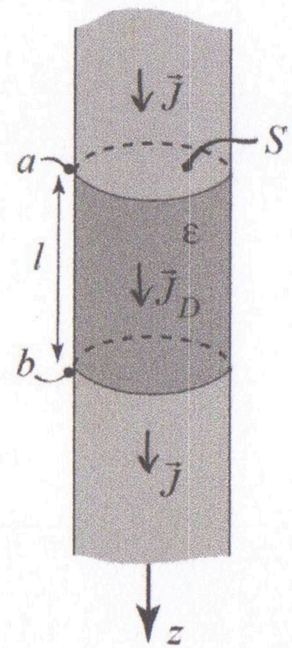
a) POR CONSERVAÇÃO DE CORRENTE $j_D(t) = j(t) = j_0 \cos \omega t \, \hat{a}_z$

b) $i_D = j_D S = \varepsilon \frac{dE}{dt} \Rightarrow E(t) = \frac{j_0 S}{\omega \varepsilon} \operatorname{sen} \omega t + C = \frac{\Delta V(t)}{\ell}$ (CONSIDERANDO E UNIFORME)

$\Delta V(t) = \frac{j_0 \ell S}{\omega \varepsilon} \operatorname{sen} \omega t + C$ MAS $\Delta V(0) = 0$ ENTÃO $C = 0$

VOLUME

ASSIM $\Delta V(t) = \frac{j_0 \mathcal{V}}{\omega \varepsilon} \operatorname{sen} \omega t$



3) Considere a existência **no vácuo** de um campo eletromagnético dado por:

$$\vec{E} = E_0 cos[\omega(t - {}^{z}/_{c})]\hat{a}_x$$
$$\vec{H} = \frac{E_0}{Z_0} cos[\omega(t - {}^{z}/_{c})]\hat{a}_y$$

com $c = {}^{1}/_{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ e $Z_0 = \sqrt{{}^{\mu_0}/_{\varepsilon_0}}$ e ω representando a frequência angular de oscilações dos campos no tempo. Utilize a forma diferencial das equações de Maxwell e as relações constitutivas entre campos no vácuo e resolva as seguintes questões:

a) Determine os vetores $\vec{D}$ e $\vec{B}$

b) Determine a densidade de cargas livres ρ .

c) Determine a densidade de correntes livres $\vec{J}$

d) Verifique que os campos satisfazem a lei de Faraday.

$$\frac{\mu_0}{Z_0} = \mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{1}{c}$$

$$Z_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

a) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_x$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{\mu_0 E_0}{Z_0}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_y = \frac{E_0}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_y$

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{dE_x}{dx} = 0$ NÃO HÁ CARGAS LIVRES

c) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial H_y}{\partial z}\hat{a}_x = \vec{J} + \frac{\partial D_x}{\partial t}\hat{a}_x$

$-\frac{\partial H}{\partial z}\hat{a}_x = -\frac{E_0}{Z_0}\frac{\omega}{c}\,\text{sen}\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_x = \vec{J} - \varepsilon_0 E_0\,\omega\,\text{sen}\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_x =$

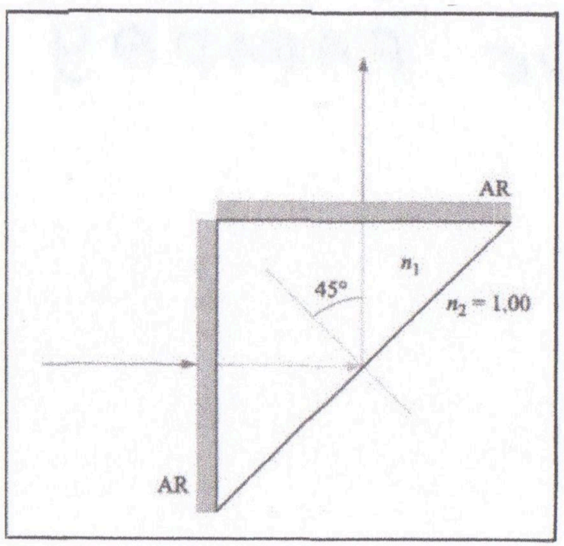
$= \vec{J} - \frac{E_0\omega}{Z_0 c}\,\text{sen}\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]\hat{a}_x$ ENTÃO $\vec{J} = 0$ NÃO HÁ CORRENTES LIVRES

4)

Um prisma deverá ser usado para virar um raio de luz em 90°, como mostrado na Figura. A luz entra e sai do prisma através de duas superfícies anti-reflexivas (AR). A reflexão total deverá acontecer na superfície posterior, onde o ângulo de incidência está a 45° com a normal. Determine o índice de refração mínimo necessário do material do prisma se a região em volta é o ar.

LEI DE SNELL $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_P}{\operatorname{sen}\theta_{AR}} = \dfrac{n_P}{n_{AR}} = n$ NO ÂNGULO LIMITE $\operatorname{sen}\theta_{AR} = 1$

ENTÃO $n = \operatorname{sen}\theta_P = \operatorname{sen}45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



5-

Um fabricante produz um ferrite com $\mu = 750\mu_o$, $\varepsilon = 5\varepsilon_o$ e $\sigma = 10^{-6}$ S/m em 10 MHz.

(a) Você classificaria este material como sendo sem perdas, com perdas ou condutor?

(b) Calcule β e λ.

(c) Determine a diferença de fase entre dois pontos separados por 2 m.

(d) Encontre a impedância intrínseca.

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi\, 10\times10^6 = 62{,}8\times10^6$ rad/s $\omega\varepsilon = 62{,}8\times10^6 \times 5\times8{,}85\times10^{-12} = 2{,}78\times10^{-3}$ S/m

$\sigma < \omega\varepsilon$ NÃO É BOM CONDUTOR

$\sigma = 0{,}001\times10^{-3}$ S/m E $\omega\varepsilon = 2{,}78\times10^{-3}$ S/m ENTÃO $\sigma \ll \omega\varepsilon$

PODEMOS CONSIDERAR UM MEIO SEM PERDA

b) $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 62{,}8\times10^6\sqrt{750\times4\pi\times10^{-7}\times5\times8{,}85\times10^{-12}} = 12{,}8$ rad/m

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{12{,}8} = 49$ cm

c) DIFERENÇA DE FASE EM DISTÂNCIA $\beta\Delta z = 12{,}8\times2 = 25{,}6$ rad

4 CICLOS DE 2π + 0,074 rad ENTÃO A DIFERENÇA DE FASE É 0,074 rad

d) $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{750\times4\pi\times10^{-7}}{5\times8{,}85\times10^{-12}}} = 4615\ \Omega$

Em uma linha de transmissão com um dielétrico sem perdas ($\varepsilon = 4{,}5\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$),

$$\mathbf{E} = \frac{40}{\rho}\,\text{sen}\,(\omega t - 2z)\,\mathbf{a}_\rho \ \text{V/m}$$

encontre: (a) ω e $\mathbf{H}$; (b) o vetor de Poynting; (c) a média temporal da potência que atravessa a superfície $z = 1$ m, 2 mm $< \rho <$ 3 mm, $0 < \phi < 2\pi$.

a) $\beta = 2$ rad/m $\quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times 4{,}5\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times4{,}5\times8{,}85\times10^{-12}}} = 1{,}41\times10^{8}$ m/s

$\omega = u\beta = 2{,}82\times10^{8}$ rad/s $\quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4{,}5}}\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{4{,}5}}377 = 178\,\Omega$

$H_0 = \frac{E_0}{\eta} = \frac{40/\rho}{\eta} = \frac{40/\rho}{178} = \frac{0{,}225}{\rho} \Rightarrow |\vec{H}| = \frac{0{,}225}{\rho}\,\text{sen}\,(\omega t - 2z)$ A/m

$\hat{a}_R \times \hat{a}_E = -\hat{a}_H \Rightarrow \hat{a}_H = -\hat{a}_z \times \hat{a}_\rho = -\hat{a}_\varphi \quad \vec{H} = -\frac{0{,}225}{\rho}\,\text{sen}(\omega t - 2z)\,\hat{a}_\varphi$ A/m

b) $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{9{,}0}{\rho^2}\,\text{sen}^2(\omega t - 2z)\,\hat{a}_z$ W/m²

c) COMO O MEIO É SEM PERDA $\quad P_{MED} = \frac{E_0^2}{2\eta} \quad \frac{40^2}{\rho^2\,178} = \frac{9{,}0}{\rho^2}$ W/m²

POTÊNCIA MÉDIA É O VETOR DE POYNTING VEZES A ÁREA

COMO O VETOR DE POYNTING VARIA COM ρ, A CADA ÁREA ENTRE ρ E $\rho + d\rho$ ($0<\varphi<2\pi$). A

POTÊNCIA MÉDIA SERÁ $d\overline{P_{OT}} = P_{MED}\,2\pi\rho\,d\rho$ ENTÃO $\overline{P_{OT}} = \int_{0{,}002}^{0{,}003} \frac{9{,}0}{\rho^2}\,2\pi\rho\,d\rho = 9{,}0\times2\pi\,\ln 3/2 = 10{,}3$ W

7-

A onda plana $\mathbf{E} = 30\cos(\omega t - z)\mathbf{a}_x$, no ar, incide normalmente sobre um meio sem perdas ($\mu = \mu_o$, $\varepsilon = 4\varepsilon_o$) em $z = 0$. (a) Encontre Γ, τ e s. (b) Calcule os campos elétrico e magnético refletidos.

a) MEIO SEM PERDA $\eta_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \dfrac{\eta_0}{2} = \dfrac{377}{2} = 188\,\Omega$

NO AR $\eta_1 = \eta_0 = 377\,\Omega$ $\quad \Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \dfrac{188 - 377}{188 + 377} = -0{,}33$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \times 188}{188 + 377} = 0{,}67$$

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0{,}33}{1 - 0{,}33} = 2{,}0$$

b) $\vec{E}_R = \Gamma E_I = -10\cos(\omega t + z)\,\hat{a}_x$

$H_{R_m} = -\Gamma H_{I_m} = -\dfrac{\Gamma}{\eta} E_{I_m} = \dfrac{10}{188} = 0{,}53 \text{ A/m}$

$\hat{a}_R \times \hat{a}_E = -\hat{a}_H \quad \hat{a}_H = -(-\hat{a}_z) \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \quad \vec{H}_R = 0{,}53\cos(\omega t - z)\,\hat{a}_y \text{ A/m}$

8-

Um sinal no ar ($z \geq 0$) com componente de campo elétrico

$$\mathbf{E} = 10 \text{ sen } (\omega t + 3z)\, \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

incide perpendicularmente sobre a superfície do oceano em $z = 0$, conforme a Figura 10.19. Assumindo que a superfície do oceano é plana e que $\varepsilon = 80\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$, $\sigma = 4$ mhos/m no oceano, determine:

(a) ω;

(b) o comprimento de onda do sinal no ar;

(c) a tangente de perdas e a impedância intrínseca do oceano;

(d) os campos **E** refletido e transmitido.

a) $u = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{80}} \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{80}} = 0{,}34 \times 10^8 \text{ m/s}$ $\quad \omega = u \beta = 0{,}34 \times 10^8 \times 3 = 1{,}02 \times 10^8 \text{ rad/s}$

b) $\lambda = 2\pi/\beta = \frac{2\pi}{3} = 2{,}1 \text{ m}$

c) $\omega \varepsilon = 1{,}02 \times 10^8 \times 80 \times 8{,}85 \times 10^{-12} = 0{,}722$ mhos/m $\quad \sigma = 4$ mhos/m

MEIO COM PERDA

$tg\theta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{4}{0{,}722} = 5{,}54$ $\quad |\eta| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}} = \frac{\eta_o}{\sqrt{80}} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{4}{0{,}722}\right)^2\right]^{1/4}}$

$|\eta| = 17{,}8\ \Omega$

$\vec{E}_R = -9{,}1 \text{ sen } (\omega t - 3z)\, \hat{a}_x$

d) $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{17{,}8 - 377}{17{,}8 + 377} = -0{,}91$ $\quad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \times 17{,}8}{17{,}8 + 377} = 0{,}09$ $\quad \vec{E}_T = 0{,}9 \text{ sen } (\omega t + 3z)\, \hat{a}_x$

9-

Uma onda polarizada paralelamente no ar com

$$\mathbf{E} = (8\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z)\ \text{sen}\ (\omega t - 4y - 3z)\ \text{V/m}$$

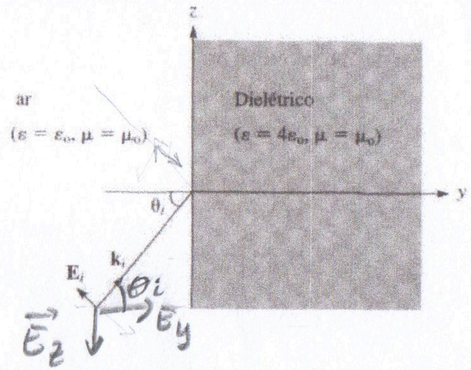
incide em um semi-espaço dielétrico, conforme mostra a Figura 10.21. Encontre: (a) o ângulo de incidência θ_i; (b) a média temporal da densidade de potência no ar ($\mu = \mu_o$ e $\varepsilon = \varepsilon_o$); (c) os campos **E** refletido e transmitido.

a) $|E_z| = 6\ \text{V/m} \quad |E_y| = 8\ \text{V/m}$

$$tg\,\theta_i = \frac{E_z}{E_y} = \frac{6}{8} \Rightarrow \theta_i = 37^\circ$$

b) $$\vec{P}_{MED} = \frac{1}{T}\int \vec{P}\,dt = \frac{E_o^2}{2\eta_1}\hat{a}_p$$

$$\vec{a}_p = \hat{a}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z}{5}$$



$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 = 377\,\Omega \qquad E_{o_I} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ \text{V/m}$$

$$\vec{P}_{MED} = \frac{100}{2 \times 377}(0{,}8\,\hat{a}_y + 0{,}6\,\hat{a}_z) = 0{,}106\,\hat{a}_y + 0{,}080\,\hat{a}_z \quad \text{W/m}^2$$

$$|\vec{P}_{MED}| = 0{,}133\ \text{W/m}^2$$

$$\cos\theta_I = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{sen}\,\theta_I = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\vec{k}_I = 4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z$$

c) $$\vec{E}_I = E_{OI}(\cos\theta_i\,\hat{a}_y - \text{sen}\,\theta_i\,\hat{a}_z)\,\text{sen}(\omega t - \vec{k}_I \cdot \vec{r})$$

$$\vec{E}_R = E_{OR}(\cos\theta_R\,\hat{a}_y + \text{sen}\,\theta_R\,\hat{a}_z)\,\text{sen}(\omega t + \vec{k}_R \cdot \vec{r})$$

$$\theta_r = \theta_i \qquad |\vec{k}_R| = |\vec{k}_I|$$

$$\vec{k}_R = -4\hat{a}_y + 3\hat{a}_z \ \left(\text{REFLETE EM } y\right)$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta_T}{\text{sen}\,\theta_I} = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,\theta_T = 0{,}3$$

$$\cos\theta_T = 0{,}954$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = \frac{\eta_0}{2}$$

$$E_{OR} = E_{OI}\,\frac{\eta_2\cos\theta_T - \eta_1\cos\theta_I}{\eta_2\cos\theta_T + \eta_1\cos\theta_I} = 10\,\frac{\frac{\eta_0}{2}0{,}954 - \eta_0 0{,}8}{\frac{\eta_0}{2}0{,}954 + \eta_0 0{,}8}$$

$$E_{OR} = -2{,}53\ \text{V/m}$$

$$\vec{E}_R = (-2{,}02\,\hat{a}_y - 1{,}52\,\hat{a}_z)\,\text{sen}(\omega t + 4y - 3z)\ \text{V/m}$$

$$\vec{E}_T = E_{0T}(\cos\theta_T \hat{a}_y - \operatorname{sen}\theta_T \hat{a}_z)\operatorname{sen}(\omega t - \vec{k}_T \cdot \vec{r})$$

$$\vec{k}_T = \beta_T(\cos\theta_T \hat{a}_y + \operatorname{sen}\theta_T \hat{a}_z)$$

$$\frac{\beta_T}{\beta_I} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0 4\varepsilon_0}{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2 \qquad \beta_I = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \text{ rad/m} \Rightarrow \beta_T = 2 \times 5 = 10 \text{ rad/m}$$

$$\vec{k}_T = 10(0{,}954\,\hat{a}_y + 0{,}3\,\hat{a}_z) = 9{,}54\,\hat{a}_y + 3{,}0\,\hat{a}_z \text{ rad/m}$$

$$E_{0T} = E_{0I}\frac{2\eta_2\cos\theta_I}{\eta_2\cos\theta_T + \eta_1\cos\theta_I} = 10\,\frac{2\frac{\eta_0}{2}0{,}8}{\frac{\eta_0}{2}0{,}954 + \eta_0\, 0{,}8} = 6{,}26 \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_T = 6{,}26(0{,}954\,\hat{a}_y - 0{,}3\,\hat{a}_z)\operatorname{sen}(\omega t - 9{,}54y - 3z) \text{ V/m}$$

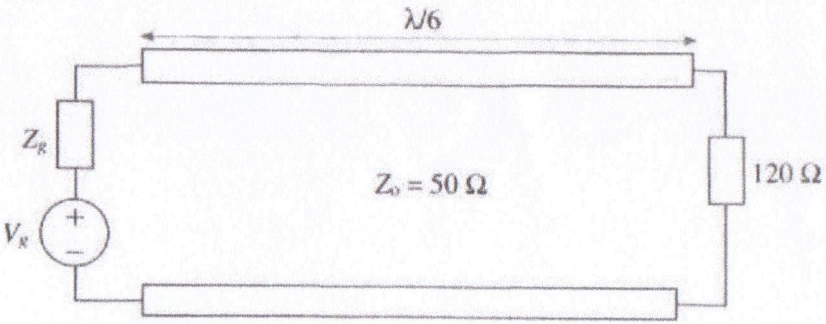
$$\vec{E}_T = (5{,}97\,\hat{a}_y - 1{,}88\,\hat{a}_z)\operatorname{sen}(\omega t - 9{,}54y - 3z) \text{ V/m}$$

ONDE $\frac{\omega}{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3{,}0\times10^8 \text{ m/s} \Rightarrow \omega = 15{,}0\times10^8 \text{ rad/s}$

10-

Para a linha de transmissão sem perdas da Figura 11.45: (a) encontre Γ e s; (b) determine a impedância Z_{ent} no gerador.

Figura:



a) $Z_0 = 50\Omega \qquad Z_c = 120\Omega$

$$\Gamma = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} = \frac{120-50}{120+50} = 0{,}412$$

(SEM PERDA)

$$s = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0{,}412}{1-0{,}412} = 2{,}4$$

b) $Z_{ENT} = Z_0 \left[\dfrac{Z_c + j Z_0 \, tg\, \beta l}{Z_0 + j Z_c \, tg\, \beta l} \right] = 50 \left[\dfrac{120 + j\, 50\, tg\, \pi/3}{50 + j\, 120\, tg\, \pi/3} \right] \qquad \beta l = \beta \dfrac{\lambda}{6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

(SEM PERDA)

$$Z_{ENT} = 50 \left[\frac{120 + j87}{50 + j208} \right] = 50 \left[\frac{148\, e^{j0{,}627}}{214\, e^{j1{,}34}} \right] \Rightarrow Z_{ENT} = 34{,}6 \angle 40{,}3^\circ\ \Omega$$